Determinante di matrici

Matrice di ordine 2

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \qquad det(A) = a_{11} \cdot a_{22} - a_{21} \cdot a_{12}\,.$$

Matrice di ordine 3 (scegliendo la riga 1 come terna di riferimento)

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \qquad det(A) = a_{11} \cdot det(A_{11}) - a_{12} \cdot det(A_{12}) + a_{13} \cdot det(A_{13})$$

essendo:

$$A_{11} = \begin{bmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \qquad A_{12} = \begin{bmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{bmatrix} \qquad A_{13} = \begin{bmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{bmatrix}$$

che si chiamano rispettivamente “complemento” di a_{11}, a_{12} e a_{13}.

In generale si può scegliere una qualsiasi riga o una qualsiasi colonna come terna di riferimento:

- con la riga i-esima:

  $$det(A) = a_{i1} \cdot (-1)^{i+1} det(A_{i1}) - a_{i2} \cdot (-1)^{i+2} \cdot det(A_{i2}) + a_{i3} \cdot (-1)^{i+3} \cdot det(A_{i3});$$

- con la colonna j-esima:

  $$det(A) = a_{1j} \cdot (-1)^{1+j} det(A_{1j}) - a_{2j} \cdot (-1)^{2+j} \cdot det(A_{2j}) + a_{3j} \cdot (-1)^{3+j} \cdot det(A_{3j})\,.$$

Conviene scegliere la riga o la colonna con un maggior numero di elementi nulli.

Per calcolare il determinante delle matrici

3X3 (solo per queste) si può usare la regola di Sarrus:

$$det\left(\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}\right) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{matrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{31} & a_{32} \end{matrix} =$$

$$- \quad - \quad - \qquad + \quad + \quad +$$

$$= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{31}a_{22}a_{13} - a_{32}a_{23}a_{11} - a_{33}a_{21}a_{12}$$